

# Minimisation de l'énergie cinétique transitoire dans l'écoulement 3D plan de Poiseuille commandé

X.-Q. DAO<sup>a</sup>, C. COLLEWET<sup>b</sup>

a. Inria Rennes - Bretagne Atlantique, Campus de Beaulieu, 35 042 Rennes Cedex

b. Irstea, 17 avenue de Cucillé, 35 044 Rennes Cedex

## Résumé :

*Ce article traite de la commande en boucle fermée de l'écoulement 3D plan de Poiseuille. Plus précisément, nous nous focalisons sur le problème complexe de la minimisation de l'énergie cinétique transitoire [Whidborne 07]. Nous montrons toutefois qu'il peut se simplifier grandement en augmentant le nombre de degré de libertés commandés. En effet, il est alors possible de garantir localement une énergie cinétique strictement décroissante. Des résultats de simulation valident l'approche proposée.*

## Abstract :

*This paper concerns the closed-loop control of the 3D plane Poiseuille flow. More precisely, we focus on the complex problem of the minimization of the transient kinetic energy [Whidborne 07]. However, we show in this paper that when the number of controlled degrees of freedom of the system can be increased, the kinetic energy is ensured to be locally a monotonically decreasing function. Simulations results validate our approach.*

**Mots clefs :** croissance transitoire ; commande en boucle fermée ; degré de liberté

## 1 Introduction

Les techniques de commande des écoulements permettent de modifier leur état de telle manière à retarder ou à accélérer la transition de l'état laminaire à l'état turbulent. De telles techniques ont un champ d'application très vaste, citons à titre d'exemple le domaine des transports aériens où une diminution de la consommation des avions est attendue par réduction de leur traînée [Flaig 08].

Les équations de Navier-Stokes étant très complexes, la très grande majorité des travaux existants en commande en boucle fermée est basée sur une linéarisation autour de l'état laminaire (voir par exemple [McKernan 07], [Kim 07], [Tatsambon Fomena 11]). La convergence du schéma de commande est de ce fait bien sûr uniquement locale et dépend fortement de la perturbation initiale qui aura conduit l'écoulement de son état laminaire à son état courant. Il est généralement admis que l'énergie cinétique est un choix naturel de mesure de la taille de cette perturbation [Joseph 76]. Dans ce contexte, il a été montré dans [Gustavsson 91], [Butler 92] que la non-normalité de la matrice décrivant le comportement du système bouclé linéarisé joue un rôle fondamental. Si cette matrice est normale, c'est-à-dire si tous les vecteurs propres sont orthogonaux entre eux, une croissance de l'énergie cinétique ne peut pas être observée. À l'inverse, il a été montré également qu'une petite perturbation peut être énormément amplifiée même si les valeurs propres de cette matrice sont à partie réelle strictement négative. C'est ainsi que beaucoup de travaux tentent de rendre ces vecteurs propres les plus orthogonaux possible entre eux (voir par exemple [Bewley 98], [Aamo 02], [McKernan 07]). Ils reposent sur l'utilisation d'une commande LQR dont le but est de minimiser une fonction de coût s'exprimant à partir de l'énergie cinétique de la perturbation et de l'énergie nécessaire au fonctionnement des actionneurs. Ce type d'approche permet de réduire la croissance de l'énergie cinétique limitant ainsi le risque d'excursion vers un état turbulent mais ne l'élimine pas. Il en va de même avec des approches LMI (voir par exemple [Martinelli 11]).

La contribution principale de cet article est de montrer qu'il est possible de concevoir une loi de commande assurant localement une énergie cinétique strictement décroissante via l'augmentation du nombre de degrés de liberté commandés. Plus précisément, nous garantissons un découplage des composantes du vecteur d'état ainsi que leur stricte décroissance. De ce fait, toute quantité dépendant de ce vecteur sera également une fonction strictement décroissante du temps, c'est précisément le cas de l'énergie cinétique et de la traînée.

Cet article s'articule de la façon suivante. Nous nous focalisons tout d'abord sur l'obtention d'un modèle d'état à la section 2. Ce modèle nous permet de concevoir la loi de commande à la section 3, la stabilité du système bouclé tout comme sa robustesse au bruit de mesure est également discutée dans cette section. Des résultats de simulation valident l'approche proposée à la section 4.

## 2 Obtention d'un modèle d'état

Comme nous l'avons mentionné en introduction, l'approche classique consiste à linéariser les équations de Navier-Stokes autour de l'écoulement en régime établi. Il est alors possible d'obtenir une formulation en vitesse-vorticité [Butler 92] :

$$\frac{\partial(\Delta v)}{\partial t} + U \frac{\partial(\Delta v)}{\partial x} - \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta^2 v = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta \eta = - \frac{dU}{dy} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2)$$

dans lesquelles  $v$  est la composante normale de la vitesse de la perturbation  $v(x, y, z, t)$  définie comme étant la différence entre la vitesse courante  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$  et la vitesse en régime établi  $\mathbf{V}_b = (1 - y^2, 0, 0)$ .  $\eta$  est la composante normale de la vorticité.  $U = 1 - y^2$  est la composante suivant  $x$  de  $\mathbf{V}_b$ ,  $x$  étant la direction d'écoulement,  $y$  la direction normale aux parois et  $z$  la direction perpendiculaire à la direction d'écoulement et aux parois.  $R$  est le nombre de Reynolds.

En cherchant des solutions complexes  $(v_c, \eta_c)$  à (1-2) sous la forme d'une série de Fourier tronquée dans les directions  $x$  et  $z$  conformément au modèle conceptuel proposé par [Joshi 97] et en ne considérant qu'un seul couple de nombre d'onde  $(n_{st}, n_{sp})$  (où  $n_{st} = 0 \cdots N_{st}$  et  $n_{sp} = 0 \cdots N_{sp}$ ), il vient :

$$v_c(x, y, z, t) = \tilde{v}(y, t) e^{j(\alpha x + \beta y)}, \quad \eta_c(x, y, z, t) = \tilde{\eta}(y, t) e^{j(\alpha x + \beta y)}, \quad (3)$$

où  $\alpha = \frac{2\pi n_{st}}{L_x}$  et  $\beta = \frac{2\pi n_{sp}}{L_z}$  avec  $L_x$  la période dans la directions  $x$ , et  $L_z$  celle dans la direction  $z$ .

En injectant (3) dans (1-2), une approximation à (1-2) est obtenus en résolvant (4-5) (avec  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ , voir [McKernan 06] pour plus amples détails) :

$$(-k^2 U - \frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{k^4}{jR\alpha}) \tilde{v} + (U + \frac{2k^2}{jR\alpha}) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} - \frac{1}{jR\alpha} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial y^4} = \frac{j}{\alpha} (\frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial y^2 \partial t} - k^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}) \quad (4)$$

$$(j\alpha U + \frac{k^2}{R}) \tilde{\eta} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial y^2} + j\beta \frac{dU}{dy} \tilde{v} = - \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}. \quad (5)$$

Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille, une commande aux frontières est possible. Cette façon de faire conduit aux conditions de Dirichlet non homogènes de  $\tilde{v}(y = \pm 1, t)$  et  $\tilde{\eta}(y = \pm 1, t)$  suivantes :

$$\tilde{v}(+1, t) = \sum_{m=0}^M \tilde{q}_{v,u,m}(t), \quad \tilde{v}(-1, t) = \sum_{m=0}^M \tilde{q}_{v,l,m}(t), \quad \tilde{\eta}(+1, t) = \sum_{m=0}^M \tilde{q}_{\eta,u,m}(t), \quad \tilde{\eta}(-1, t) = \sum_{m=0}^M \tilde{q}_{\eta,l,m}(t), \quad (6)$$

les conditions de Neumann restant homogènes aux frontières. Néanmoins, comme proposé dans [Boyd 01], le changement de variables suivant permet de rétablir des conditions de Dirichlet homogènes :

$$\tilde{v}(y, t) = \tilde{v}_h(y, t) + \sum_{m=0}^M \mathbf{F}_{v,m}(y)^\top \mathbf{q}_{v,m}(t), \quad \tilde{\eta}(y, t) = \tilde{\eta}_h(y, t) + \sum_{m=0}^M \mathbf{F}_{\eta,m}(y)^\top \mathbf{q}_{\eta,m}(t), \quad (7)$$

dans lesquelles nous avons introduit les vecteurs  $\mathbf{F}_{v,m}(y) = (f_{v,u,m}(y), f_{v,l,m}(y))$ ,  $\mathbf{q}_{v,m}(t) = (\tilde{q}_{v,u,m}(t), \tilde{q}_{v,l,m}(t))$ ,  $\mathbf{F}_{\eta,m}(y) = (f_{\eta,u,m}(y), f_{\eta,l,m}(y))$ , et  $\mathbf{q}_{\eta,m}(t) = (\tilde{q}_{\eta,u,m}(t), \tilde{q}_{\eta,l,m}(t))$ , où les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} f_{v,u,m}(+1) = f_{v,l,m}(-1) = 1, & f_{v,u,m}(-1) = f_{v,l,m}(+1) = 0, & f'_{v,u,m}(\pm 1) = f'_{v,l,m}(\pm 1) = 0 \\ f_{\eta,u,m}(+1) = f_{\eta,l,m}(-1) = 1, & f_{\eta,u,m}(-1) = f_{\eta,l,m}(+1) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

ainsi que  $\tilde{v}_h(\pm 1, t) = \tilde{v}'_h(\pm 1, t) = \tilde{\eta}_h(\pm 1, t) = 0$  (les conditions de Dirichlet et Neumann homogènes).

L'obtention du modèle de l'état reverché s'obtient alors par le biais de la discrétisation suivante :

$$\tilde{v}_h(y, t) = \sum_{n=0}^N a_{v,n}(t) \Gamma_n^v(y), \quad \tilde{\eta}_h(y, t) = \sum_{n=0}^N a_{\eta,n}(t) \Gamma_n^\eta(y), \quad (9)$$

où les polynômes  $\Gamma_n^v(y)$  et  $\Gamma_n^\eta(y)$  vérifient à la fois les conditions de Dirichlet et Neumann (voir [McKernan 06] pour plus amples détails). Par suite, en utilisant (9) dans (7) et en injectant le résultat dans (4-5) nous obtenons un système d'équations ordinaires qui, une fois évalué en  $N + 1$  points de Gauss-Lobatto  $y_i = \cos(i\pi/(N + 1))$ ,  $0 \leq i \leq N$  conduit à la représentation recherchée :

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\dot{\mathbf{u}}(t), \quad (10)$$

où  $\mathbf{x}(t)$  est le vecteur d'état :  $\mathbf{x}(t) = (a_{v,0}(t), \dots, a_{v,N}(t), a_{\eta,0}(t), \dots, a_{\eta,N}(t))$ ,  $\mathbf{u}(t)$  est le signal de commande :  $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{q}_{v,0}(t), \dots, \mathbf{q}_{v,M}(t), \mathbf{q}_{\eta,0}(t), \dots, \mathbf{q}_{\eta,M}(t))$ . Les matrices  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  s'expriment de façon complexe, nous ne les détaillerons pas ici par soucis de concision. Toutefois, il est important de noter dès à présent que les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  dépendent fortement des vecteurs  $\mathbf{F}_{v,m}(y_i)$  et  $\mathbf{F}_{\eta,m}(y_i)$  ainsi que de leurs dérivées suivant  $y$  jusqu'à l'ordre 4 au plus.

### 3 Conception de la loi de commande

Comme nous l'avons détaillé en introduction de cet article, notre but est d'obtenir une décroissance stricte de l'énergie cinétique de la perturbation, nous avons évoqué également qu'il était intéressant d'obtenir aussi une décroissance de la traînée. Ces deux grandeurs s'expriment aisément en fonction du vecteur d'état (voir [McKernan 06]). En effet, la traînée  $\mathbf{d}(t)$  s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{D}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2\mathbf{u}(t), \quad (11)$$

où les matrices  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_2$  sont constantes. L'énergie cinétique  $\varepsilon(t)$  s'écrit quant à elle de la façon suivante :

$$\varepsilon(t) = \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q}_{11} \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q}_{12} \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}^\top(t) \mathbf{Q}_{22} \mathbf{u}(t), \quad (12)$$

où les matrices  $\mathbf{Q}_{11}$ ,  $\mathbf{Q}_{12}$  et  $\mathbf{Q}_{22}$  sont aussi constantes.

Par conséquent, en supposant une commande par retour d'état  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  et en supposant qu'il soit possible de calculer une matrice  $\mathbf{K}$  assurant une décroissance exponentielle du vecteur d'état  $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\lambda\mathbf{x}(t)$ , il est aisé d'établir les relations suivantes :  $\dot{\mathbf{u}}(t) = -\lambda\mathbf{u}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{d}}(t) = -\lambda\mathbf{d}(t)$  et  $\dot{\varepsilon}(t) = -2\lambda\varepsilon(t)$ . Cette façon de faire assurerait le comportement recherché.

#### 3.1 Loi de commande

En injectant  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  et  $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\lambda\mathbf{x}(t)$  dans (10), un calcul simple permet d'établir la contrainte suivante :

$$(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{K} = -(\lambda\mathbf{L} + \mathbf{A}). \quad (13)$$

Comme il nous est possible de fixer le nombre de degrés de liberté commandés, nous imposons bien évidemment  $M = N$  (sinon, le problème du découplage peut devenir très complexe (voir par exemple [Gras 89])). Dans ce cas, la matrice  $\mathbf{K}$  s'obtient facilement en inversant la matrice carrée  $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$ .

Cependant, les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  sont extrêmement mal conditionnées. En se rappelant que ces matrices dépendent des vecteurs  $\mathbf{F}_{v,m}(y_i)$  et  $\mathbf{F}_{\eta,m}(y_i)$  exprimés en chaque point de Gauss-Lobatto et en imposant de façon judicieuse certaines contraintes à définir (voir la section 3.4), l'égalité suivante peut être obtenue :

$$(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = -\mu(\lambda\mathbf{L} + \mathbf{A}) \quad (14)$$

conduisant simplement à  $\mathbf{K} = \frac{1}{\mu}\mathbf{I}$  où le scalaire  $\mu$  est choisi de façon à limiter l'amplitude du signal de commande à  $t = 0$ .

### 3.2 Stabilité du système bouclé

La stabilité du système bouclé est un point crucial. Considérons tout d'abord qu'il soit possible d'exhiber dans un certain domaine de variation de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{u}$  le modèle d'état non linéaire suivant  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ .

Étant entendu que le système bouclé vérifie  $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\lambda\mathbf{x}(t)$ , il est clair que  $\mathbf{x} = 0$  est un point d'équilibre stable exponentiellement pour le système linéarisé (10) et pour la loi de commande dérivée en 3.1. Par conséquent,  $\mathbf{x} = 0$  est un point d'équilibre stable exponentiellement localement pour le système non linéaire  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  (voir [Khalil 02]). Néanmoins, il n'est pas possible d'étendre cette propriété au système gouverné par les équations de Navier-Stokes. En effet, à notre connaissance, une telle propriété n'a pu être étendue que dans des cas simplifiés, comme c'est le cas des équations de Saint-Venant par exemple (voir [Bastin 09]).

### 3.3 Robustesse vis-à-vis du bruit de mesure

Un autre problème important concerne le comportement du système bouclé en présence de bruit de mesure. Dans ce cas, la loi de commande devient  $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\mu}\hat{\mathbf{x}}(t)$  où  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  est une approximation du vecteur d'état réel. Le problème consiste alors à vérifier que  $\mathbf{x} = 0$  est toujours un point d'équilibre exponentiellement stable.

Comme dans nos travaux précédents [Tatsambon Fomena 11], nous considérons qu'une approche basée vision est utilisée pour évaluer  $\mathbf{x}(t)$ . Un système de visualisation, comme une caméra CCD, est donc nécessaire. Dans ce cas, nous avons montré [Tatsambon Fomena 11] l'égalité suivante :  $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \frac{1}{N_x}\mathbf{e}(t)$  où  $N_x$  est le nombre de pixels de la caméra dans la direction d'écoulement (en considérant une caméra dont l'axe optique pointe dans la direction  $z$ ). Le vecteur  $\mathbf{e}(t)$  est relatif au bruit de mesure. Dans ces conditions la loi de commande s'écrit maintenant  $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\mu}(\mathbf{x}(t) + \frac{1}{N_x}\mathbf{e}(t))$ . En injectant cette commande dans (10) et en prenant en compte (14), il vient après quelques manipulations simples :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\lambda\mathbf{x}(t) + \frac{\mathbf{a}}{\mu N_x}\mathbf{e}(t) + \frac{\mathbf{b}}{\mu N_x}\dot{\mathbf{e}}(t), \quad (15)$$

avec  $\mathbf{a} = (\mathbf{L} - \frac{1}{\mu}\mathbf{E})^{-1}(\lambda\mathbf{E} - \mu(\lambda\mathbf{L} + \mathbf{A}))$  et  $\mathbf{b} = (\mathbf{L} - \frac{1}{\mu}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}$ . En pratique, comme  $N_x$  est très grand, le term  $\frac{\mathbf{a}}{\mu N_x}\mathbf{e}(t)$  est très petit. Cependant, de par la présence du terme  $\dot{\mathbf{e}}(t)$ , le terme  $\frac{\mathbf{b}}{\mu N_x}\dot{\mathbf{e}}(t)$  peut être lui potentiellement grand. Par conséquent, en plus de la condition (14) nous imposons également  $\mathbf{E} = 0$ . Dans ces conditions, (15) devient :  $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\lambda\mathbf{x}(t) - \frac{\lambda\mathbf{L} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}}{N_x}\mathbf{e}(t)$  soit en pratique  $\dot{\mathbf{x}}(t) \approx -\lambda\mathbf{x}(t)$ . Notre approche est donc robuste au bruit de mesure.

Examinons à présent comme il est possible d'assurer à la fois  $\mathbf{B} = -\mu(\lambda\mathbf{L} + \mathbf{A})$  et  $\mathbf{E} = 0$ .

### 3.4 Satisfaction des contraintes $\mathbf{B} = -\mu(\lambda\mathbf{L} + \mathbf{A})$ et $\mathbf{E} = 0$

Nous comptons assurer les contraintes voulues via l'interpolation de Hermite. Rappelons tout d'abord l'interpolation de Lagrange, l'interpolation de Hermite en étant une extension. Ce type d'interpolation permet de calculer les coefficients d'un polynôme pour qu'il coïncide avec la fonction que l'on cherche à interpoler en un ensemble de points. L'interpolation de Hermite permet de prendre en compte des contraintes additionnelles portant sur la valeur des dérivées de la fonction à interpoler à des ordres supérieurs.

Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  dépendant des vecteurs  $\mathbf{F}_{v,m}(y_i)$  et  $\mathbf{F}_{\eta,m}(y_i)$  en tout point  $y_i$ , eux-mêmes dépendant des grandeurs  $f_{v,l}(y_i)$ ,  $f_{v,u}(y_i)$ ,  $f_{\eta,l}(y_i)$  et  $f_{\eta,u}(y_i)$ , il est clair qu'il est possible en choisissant judicieusement les fonctions  $f_{v,l}$ ,  $f_{v,u}$ ,  $f_{\eta,l}$  et  $f_{\eta,u}$  d'influer sur la valeur de ces matrices. En écrivant explicitement  $\mathbf{B} = -\mu(\lambda\mathbf{L} + \mathbf{A})$  et  $\mathbf{E} = 0$  en fonction de  $f_{v,l}(y_i)$ ,  $f_{v,u}(y_i)$ ,  $f_{\eta,l}(y_i)$  et  $f_{\eta,u}(y_i)$  il est possible d'écrire des contraintes à satisfaire pour les fonctions  $f_{v,l}$ ,  $f_{v,u}$ ,  $f_{\eta,l}$  et  $f_{\eta,u}$  en tout point  $y_i$ . Toutefois, leur expression étant trop complexe, nous ne les donnerons pas ici par soucis de concision. À ces contraintes, il faut ajouter celles données en (8). Dans ces conditions les fonctions recherchées s'écrivent alors :

$$f_{\phi,\psi}(y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^P f_{\phi,\psi}^{(j)}(y_i) H_{\phi,\psi,ij}(y) \quad (16)$$

avec  $P$  l'ordre des dérivées de la fonction  $f_{\phi,\psi}^{(j)}$ ,  $\phi = v$  (dans ce cas  $P = 4$ ) ou  $\phi = \eta$  (alors que dans ce cas  $P = 2$ ),  $\psi = u$  ou  $\psi = l$  et où le polynôme  $H_{\phi,\psi,ij}(y)$  est donné par (voir par exemple [Berezin 73])

$$H_{\phi,\psi,ij}(y) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{P-j} \frac{1}{k!} \left( \frac{(y - y_i)^{P+1}}{\Omega_\phi(y)} \right)_{y=y_i}^{(k)} \frac{\Omega_\phi(y)}{(y - y_i)^{P+1-j-k}}, \quad \Omega_\phi(y) = \prod_{i=0}^N (y - y_i)^{P+1} \quad (17)$$

## 4 Résultats

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenu à partir du code mis à disposition par McKernan [McKernan 06]. La condition initiale est choisie par la pire condition initiale en boucle ouverte.

Introduisons tout d'abord deux grandeurs intéressantes. L'énergie synchronique  $\varepsilon_s(t)$  est définie comme l'énergie cinétique maximum à l'instant  $t$  pour la pire condition initiale sur l'état telle que  $\varepsilon(0) = 1$ , soit  $\varepsilon_s(t) = \max_{\varepsilon(0)=1} \varepsilon(t)$ . L'énergie diachronique  $\varepsilon_d$  est définie comme le maximum de l'énergie synchronique  $\varepsilon_d = \max_{t \geq 0} \varepsilon_s(t)$ . De plus, pour une condition initiale, l'énergie maximale  $\varepsilon_{\max}$  est définie comme le maximum de l'énergie cinétique  $\varepsilon_{\max} = \max_{t \geq 0} \varepsilon(t)$ .

Comme dans [Butler 92], [Bewley 98], [McKernan 07], nous considérons le cas où  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2.044$  et  $R = 5\,000$ . En effet, ces valeurs conduisent au cas le plus défavorable, l'énergie diachronique étant alors maximum.

Dans un premier temps nous montrons le bénéfice obtenu en augmentant le nombre de degrés de liberté commandés. La figure 1.a rapporte le comportement des énergies synchronique et diachronique en boucle ouverte. Comme on s'y entendait, l'énergie cinétique présente un pic responsable d'une transition potentielle vers la turbulence. La figure 1.b montre qu'une commande LQR avec 2 degrés de liberté commandés permet de diminuer la valeur de l'énergie diachronique sans toutefois éviter le pic d'énergie. La figure 1.d montre clairement le bénéfice d'augmenter le nombre de degré de liberté commandés, en effet plus le ratio  $M/N$  tend vers 1, plus l'énergie maximale diminue. La figure 1.c rapporte le comportement du système bouclé quand  $M = N$ , toujours dans le cas d'une commande LQR. Cette figure est à comparer directement avec la figure 1.b, le bénéfice obtenu est clair.

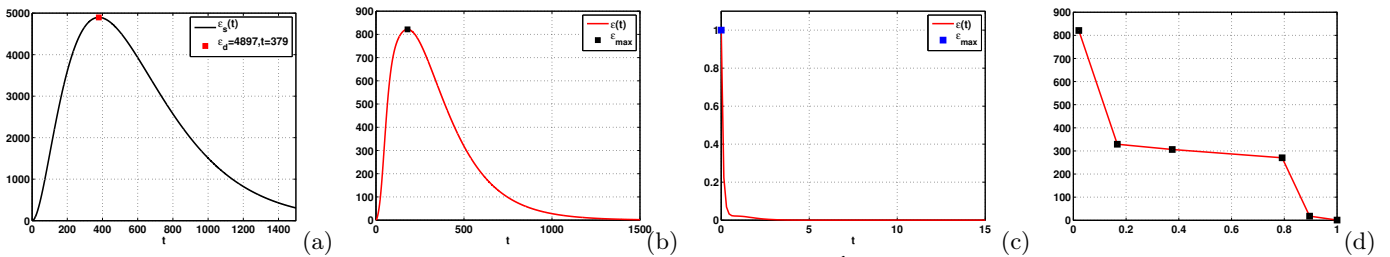


FIGURE 1 – Comportement de l'énergie cinétique vs temps. (a) Énergies synchronique et diachronique en boucle ouverte vs. temps; Commande LQR en boucle fermée : énergies cinétique et sa valeur maximale vs temps ((b)  $M = 2$ , (c)  $M = N$ ), (d) Énergie maximale en fonction de  $M/N$ .

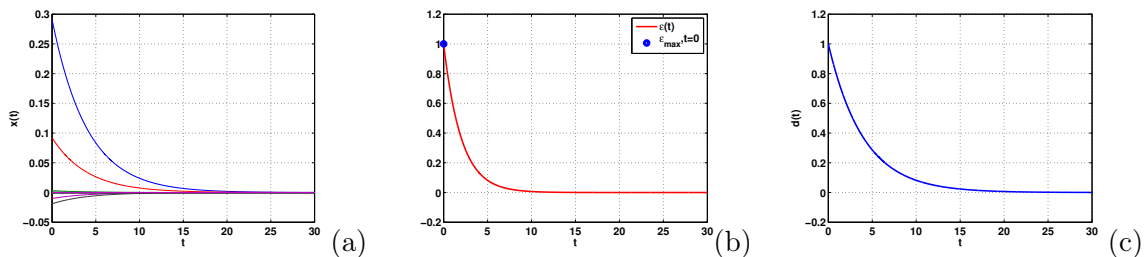


FIGURE 2 – Comportement du système découplé vs temps. (a) Quelques composantes du vecteur d'état; (b) Énergies cinétique et sa valeur maximale  $\varepsilon(t)/\varepsilon(0)$ ; (c) Traînée  $d(t)/d(0)$ .

Le prochain résultat concerne la loi de commande que nous proposons. Nous avons fixé  $\lambda = 0.25$  et  $\mu = 1$ . La figure 2.a montre que notre loi de commande permet effectivement de découpler les composantes du vecteur d'état. Par suite, l'énergie cinétique (figure 2.b) et la traînée (figure 2.c) sont

bien des exponentielles décroissantes comme il était attendu. Ce résultat est de toute importance car il garantit que les grandeurs physiques observées ne peuvent que décroître.

## 5 Conclusions

Nous avons montré dans cet article qu'augmenter le nombre de degrés de liberté commandés permettait de réduire considérablement le risque de transition vers la turbulence. Rappelons que dans la littérature du domaine, ce nombre de degré de liberté est systématiquement 1 ou 2 (alors que la dimension du système réduit est de l'ordre de  $N = 100$ ). De plus, nous avons proposé une loi de commande permettant de limiter encore plus ce risque en garantissant localement une stricte décroissance de l'énergie cinétique. Ce résultat s'étend également à la traînée. De plus, notre loi de commande est robuste au bruit de mesure.

## Références

- [Aamo 02] O. Aamo et T. Fossen, « Tutorial on Feedback Control of Flows, Part I : Stabilization of Fluid Flows in Channels and Pipes ». *Modeling, Identification and Control*, vol. 23, No 3, p. 161–226, 2002.
- [Bastin 09] G. Bastin, J.-M. Coron et B. d'Andréa Novel, « On Lyapunov stability of linearised Saint-Venant equations for a sloping channel ». *Networks and Heterogeneous Media*, vol. 4, No 2, p. 177–187, 2009.
- [Berezin 73] I. S. Berezin et N. P. Zhidkov, *Computing methods*. Pergamon, 1973.
- [Bewley 98] T. Bewley et S. Liu, « Optimal and robust control and estimation of linear paths to transition ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 365, p. 305–349, 1998.
- [Boyd 01] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Second edition, Dover, New York, 2001.
- [Butler 92] K. Butler et B. Farrell, « Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow ». *Physics of Fluids A*, vol. 4, No 8, p. 1637–1650, 1992.
- [Flaig 08] A. Flaig, « Eco-efficient by design ». *Challenges for aerodynamics engineers for future aircraft design, 8th World Congress on Computational Mechanics*, Venice, July 2008.
- [Gras 89] L. C. J. M. Gras et H. Nijmeijer, « Decoupling in nonlinear systems : from linearity to nonlinearity ». *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, vol. 136, No 2, p. 53–62, 1989.
- [Gustavsson 91] L. H. Gustavsson, « Energy growth of the three-dimensional Disturbances in plane Poiseuille flow ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 224, p. 241–260, 1991.
- [Joseph 76] D. D. Joseph, *Stability of fluid motion*, vol. 1. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [Joshi 97] S. Joshi, J. Speyer et J. Kim, « A system theory approach to the feedback stabilization of infinitesimal and finite amplitude disturbances in plane Poiseuille flow ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 332, p. 157–184, 1997.
- [Khalil 02] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, third edition, 2002.
- [Kim 07] J. Kim et T. Bewley, « A linear systems approach to flow control ». *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 39, No 1, p. 383–417, January 2007.
- [Martinelli 11] F. Martinelli, M. Quadrio, J. McKernan et J. F. Whidborne, « Linear feedback control of transient energy growth and control performance limitations in subcritical plane Poiseuille flow ». *Physics of Fluids*, 2011.
- [McKernan 06] J. McKernan, « Control of plane Poiseuille flow : a theoretical and computational investigation ». *PhD thesis*, Cranfield University, 2006.
- [McKernan 07] J. McKernan, G. Papadakis et J. Whidborne, « Linear quadratic control of plane Poiseuille flow-the transient behaviour ». *International Journal of Control*, vol. 80, No 12, p. 1912–1930, 2007.
- [Tatsambon Fomena 11] R. Tatsambon Fomena et C. Collewet, « Fluid Flow Control : a Vision-Based Approach ». *International Journal of Flow Control*, vol. 3, No 2+3, p. 133–169, 2011.
- [Whidborne 07] J. F. Whidborne et J. McKernan, « On the Minimization of Maximum Transient Energy Growth ». *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 52, No 9, p. 1762–1767, Septembre 2007.